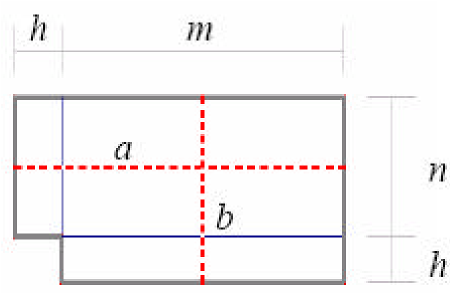
Il problema del pacchetto

Anche se Natale è ormai lontano, c'è sempre qualche occasione per un bel regalo!

Devi così impacchettare e legare con un filo un regalo contenuto in una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo lungo 15 cm, largo 10 cm alto 7 cm. Se per il nodo ed il fiocco occorrono 20 cm di nastro, basterà il nostro filo lungo 1 metro per legare il pacco?

Una prima analisi del problema

Soluzione proposta da SALVATORE



DATI DEL PROBLEMA	RISULTATI DEL PROBLEMA
m=15 cm ® lunghezza del pacco *n=10 cm ® larghezza del pacco* *h=7 cm ® altezza del pacco* *c=20 cm ® larghezza nodo + fiocco* *l=100 cm ® nastro a disposizione*	*s =.?. cm ® nastro occorrente per impacchettare il regalo*
	VINCOLI DEL PROBLEMA *s £ l*

SOLUZIONE DEL PROBLEMA

$a = h + m = 7 + 15 = 22\ cm$
$b = h + n = 7 + 10 = 17\ cm$
$s = 2 \times (a + b) + c = 2 \times (22 + 17) + 20 = 2 \times 39 + 20 = 98\ cm$

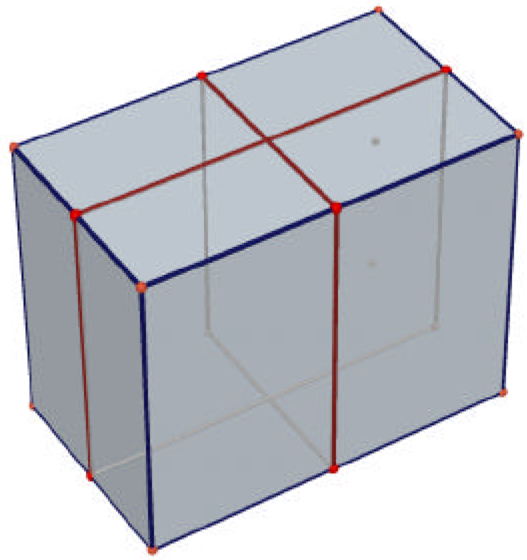
VERIFICA DEI VINCOLI

Dato che $98 = s \leq l = 100$ il regalo potrà essere impacchettato con il nastro a disposizione

Se la risposta al problema dipende dalla situazione…

Soluzione proposta da Luigi FACCIOTTO

Se si considera il pacco come un parallelepipedo, posizionato come nella figura, e non si tiene conto delle pieghe che il filo ha nell'incrocio nella parte inferiore allora risultano sufficienti $(15 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 7 \cdot 4) + 20 = 98$ cm di nastro. (la parte di nastro utilizzata nell'incrocio del filo dipende dalla larghezza del filo, ma i 2 cm mancanti al metro risultano, in questo caso, più che sufficienti)



Se invece il pacco viene confezionato in altro modo, ad esempio come nella figura che riporto qui a fianco, fatte le considerazioni di prima sulle pieghe si ha la necessità di $(15 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 10 \cdot 4) + 20 = 104$ cm
Se poi considero la terza possibilità che ho di preparare il pacco si può avere la necessità di $(10 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 15 \cdot 4) + 20 = 114$ cm
Possiamo quindi concludere che il filo lungo 1m può essere utilizzato solamente per preparare un pacco come nella figura da voi proposta per l'esempio.

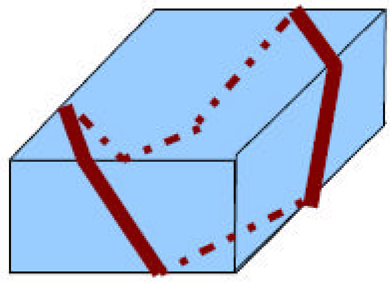
Penso che il problema, che all'apparenza appare semplice, se il modello è quello presentato, sia stato presentato proprio per sottolineare come anche di fronte a situazioni problematiche semplici si possano sviluppare dei ragionamenti significativi con gli allievi.

Una soluzione alternativa…

Soluzione proposta da Ferruccio VEGLIO

La risoluzione del problema si presenta abbastanza semplice se immaginiamo di legare il nastro in modo "classico". Una semplice analisi di come viene disposto il nastro ci mostra che la lunghezza necessaria, esclusi nodi e fiocco, è data da $l=2a+2b+4c$, dove a, b e c sono le dimensioni del parallelepipedo e in particolare a e b sono i lati della faccia sulla quale si trova il fiocco. Per rendere minimo il consumo di nastro converrà quindi legare il fiocco su una delle due facce di area maggiore, quella di lati 15 cm e 10 cm. Aggiungendo i 20 cm necessari per nodo e fiocco la lunghezza minima del nastro vale: $(2 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 7 + 20)$ cm = 98 cm < 100 cm Q.E.D.

Il problema presenta però un risvolto decisamente più interessante se consideriamo un modo alternativo di legare il nastro, che ne richiede una quantità decisamente minore; quello cioè nel
quale il nastro attraversa le facce passando da un lato al lato consecutivo di una stessa faccia, attraversando due volte ognuna delle due facce maggiori e una volta ognuna delle altre. In questo caso dovremo capire non solo quanto vale la lunghezza minima per la scatola in questione ma anche in quali casi il problema ammette soluzione e individuare una formula per esprimerla.



L'aspetto interessante del problema sta nel fatto che il problema apparentemente ostico “a scatola chiusa” diventa invece decisamente più trattabile se provvediamo a “smontare” la scatola, rivelando una elegante semplicità nascosta. L'illustrazione che segue descrive chiaramente la soluzione (sia a= b= c).Notiamo che per studiare il problema basterebbe esaminare metà dello schema

Come si può osservare affinché la lunghezza sia minima il nastro deve incontrare tutti gli spigoli secondo un angolazione costante che entro certi limiti non dipende dal punto dal quale si fa partire il nastro. Chiaramente la lunghezza minima in questo caso vale

$l=\sqrt{(2a+2c)^2+(2b+2c)^2}$:

la formula nell'esempio considerato fornisce il valore l= 55.6 cm, a cui vanno sommati i 20 cm per nodo e nastro per un totale di 75,6 cm.
E' altresì facile verificare che gli angoli formati dal nastro con gli spigoli sono a=arctan [(b+c)/(a+c)] e il suo complementare ß = p/2 - a. Inoltre, indicata con x la distanza dal vertice del punto dal quale facciamo partire il nastro dovrà essere (a+c) - b tan ß < x < 2a+c- (b+c) tan ß , che ci dà c tan ß < x <a. Se a=b tan ß = 1 e a+c-b < x < 2a - b . Se b=c (a+c)/2 < x < a. Il cubo rappresenta il caso limite nel quale il nastro passa sui vertici del parallelepipedo.