

La scatola di cioccolatini

I cioccolatini sono sempre presentati in confezioni molto originali.

Ne abbiamo trovata una a forma di tetraedro. Dopo aver mangiato tutti i cioccolatini l'abbiamo smontata ed abbiamo scoperto una proprietà curiosa: lo sviluppo piano della scatola era un quadrato di lato 36 cm.

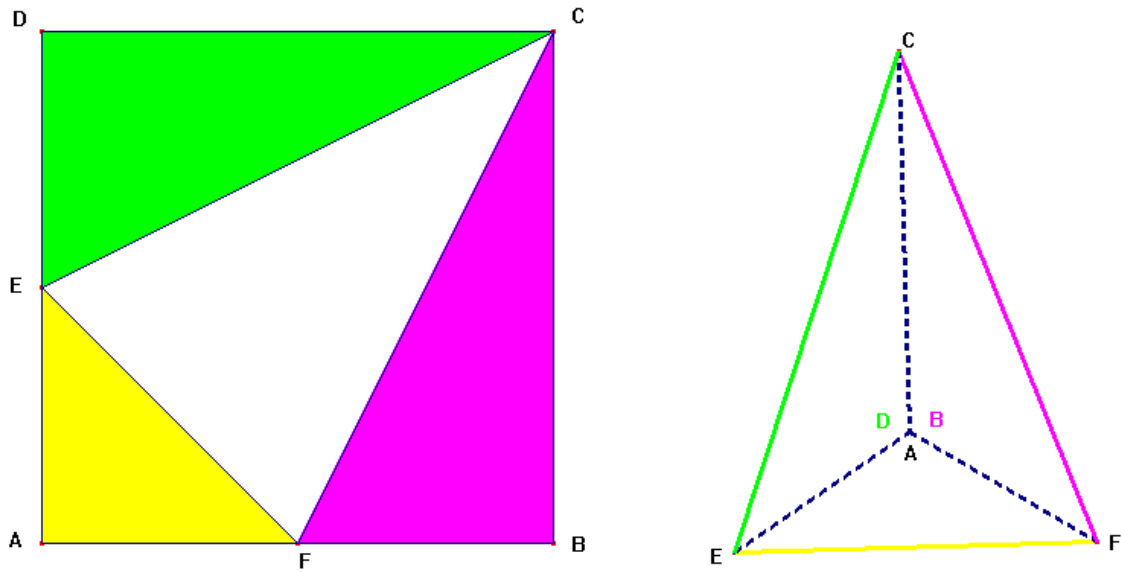
Qual è il volume di una scatola di questo tipo?

E quanti cioccolatini potrebbe contenere?

Le soluzioni proposte di seguito sono state presentate dai docenti:

- Maria Anna Alberti – Liceo Classico “N. Carlo Magno” di Lauria (PZ)
- Giacinta Moliterni – Liceo Scientifico “D. Alighieri” di Matera
- Andretta Bertone – Liceo Artistico “Alciati” di Vercelli
- Tiberio Bottacin – I.I.S. “Newton” di Camposanpiero (PD)
- Lorenzo Galante – Liceo Scientifico Statale “G. Bruno” di Torino

**SOLUZIONE DI MARIA ANNA ALBERTI
LICEO CLASSICO "N. CARLOMAGNO" LAURIA (PZ)**



$$\overline{AB} = 36 \text{ cm}$$

$$\overline{AE} = \overline{ED} = \overline{AF} = \overline{FB} = 18 \text{ cm}$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\overline{AF}^2}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \frac{1}{3} = \frac{18^2 \cdot 36}{6} = 1944 \text{ cm}^3$$

Il **volume** della scatola è, pertanto, 1944 cm^3 .

Il **numero di cioccolatini** che potrebbero essere contenuti nella scatola dipende non solo dalle dimensioni dei cioccolatini stessi, ma anche dalla loro forma e da quella della scatola, il cui volume non può essere completamente occupato.

Considerando la scomposizione in fattori primi del numero $1944 = 2^3 \cdot 3^5$, si può ipotizzare che i cioccolatini abbiano forma cubica di lato o 2 cm o 3 cm .

Poggiando il tetraedro, alto 36 cm , sulla base triangolare AEF , si possono disporre

- 168 cioccolatini cubici di lato 2 cm su strati doppi rispettivamente di 28, 21, 15, 10, 6, 3, 1 cioccolatini

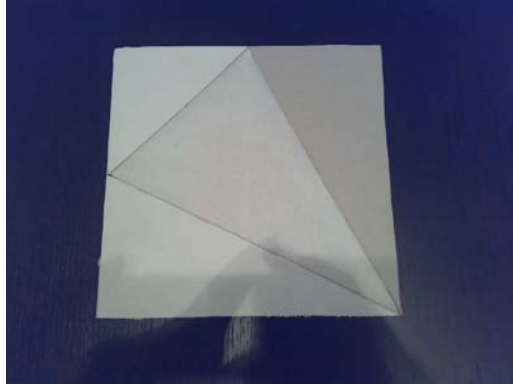
oppure

- 40 cioccolatini cubici di lato 3 cm su strati doppi rispettivamente di 10, 6, 3, 1 cioccolatini.

Giacinta Moliterni
Liceo Scientifico "Alighieri" Matera

Una scatola di cioccolatini a forma di tetraedro con lo sviluppo di un quadrato di lato 36 cm è un tetraedro non regolare di volume **1944 cm³**.

Lo sviluppo piano è quello indicato nella foto della scatola ricostruita, dividendo a metà due lati del quadrato e congiungendo i punti medi con il vertice opposto ad entrambi.



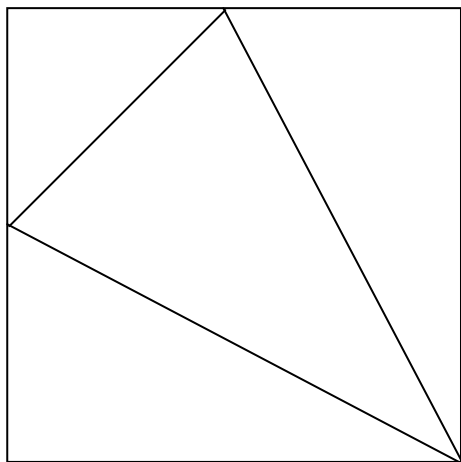
Il volume del solido può facilmente essere determinato considerando come base il triangolo rettangolo isoscele di lato 18 cm (area di base 162 cm²) ed altezza 36 cm (come si vede dalla foto).



Scegliendo invece come base il triangolo isoscele di area 486 cm², si arriva con un numero maggiore di calcoli a determinare l'altezza di 12 cm e quindi il volume (foto seguente).

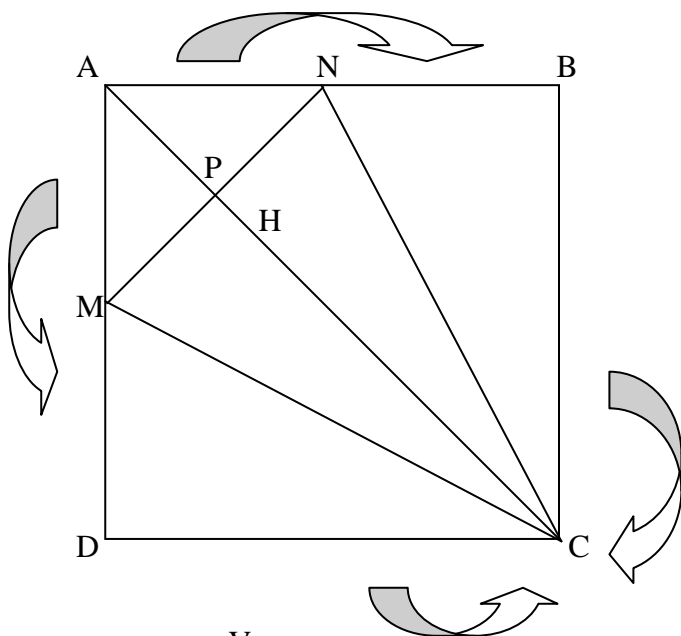


Alla seconda domanda è invece possibile rispondere solo conoscendo le dimensioni dei cioccolatini.



Sviluppo scatola

M e N sono i punti medi rispettivamente di AB e AD, perché quando si chiude la scatola AN si sovrappone a NB e AM si sovrappone a MD; inoltre gli angoli retti in A, B e D coincidono e costituiscono lo spigolo V del tetraedro opposto alla base MNC, triangolo isoscele.



$$AN=NB=AM=MD=18 \text{ cm}$$

$$MN= 18\sqrt{2} \text{ cm (th. Pitagora sul triangolo AMN)}$$

$$MP=PN= 9\sqrt{2} \text{ cm (APM congruente ANP)}$$

$$AP= 9\sqrt{2} \text{ cm (APM e ANP triangoli isosceli)}$$

$$AC= AB\sqrt{2}=36\sqrt{2} \text{ cm (diagonale del quadrato)}$$

$$PC=AC-AP=36\sqrt{2}-9\sqrt{2}=27\sqrt{2} \text{ cm}$$

Considero H, il piede della perpendicolare condotta dallo spigolo V alla base MCN.

Pongo $PH= x$

$$HC=27\sqrt{2}-x$$

$$VH=\sqrt{AP^2 - PH^2} = \sqrt{162 - x^2} \text{ (considerando il triangolo VHP)}$$

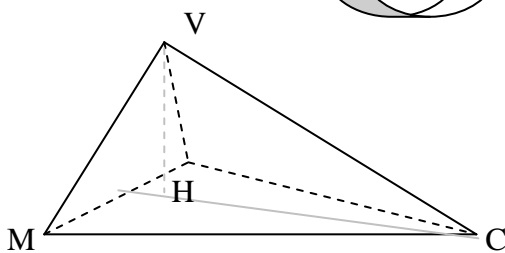
Ma anche:

$$VH=\sqrt{VC^2 - CH^2} = \sqrt{36^2 - (27\sqrt{2} - x)^2} \text{ (considerando il triangolo VHC)}$$

Pongo uguali

$$\sqrt{162 - x^2} = \sqrt{36^2 - (27\sqrt{2} - x)^2}$$

$$x=3\sqrt{2} \text{ cm}$$



$$VH = \sqrt{162 - x^2} = 12 \text{ cm}$$

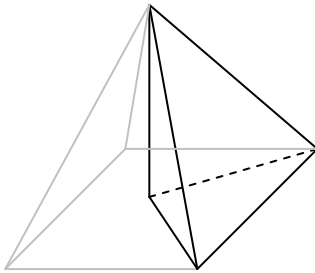
VOLUME:

1° MODO:

$$\text{Volume} = \frac{\text{areabase} \cdot \text{altezza}}{3} = \frac{MN \cdot PC \cdot VH}{6} = 1944 \text{ cm}^3$$

2° MODO: Il triangolo VPC è rettangolo in V infatti per Pitagora: $PC^2 = VP^2 + VC^2$

Quindi posso considerare il tetraedro con base VMN, retto in V, come la quarta parte della piramide a base quadrata seguente:

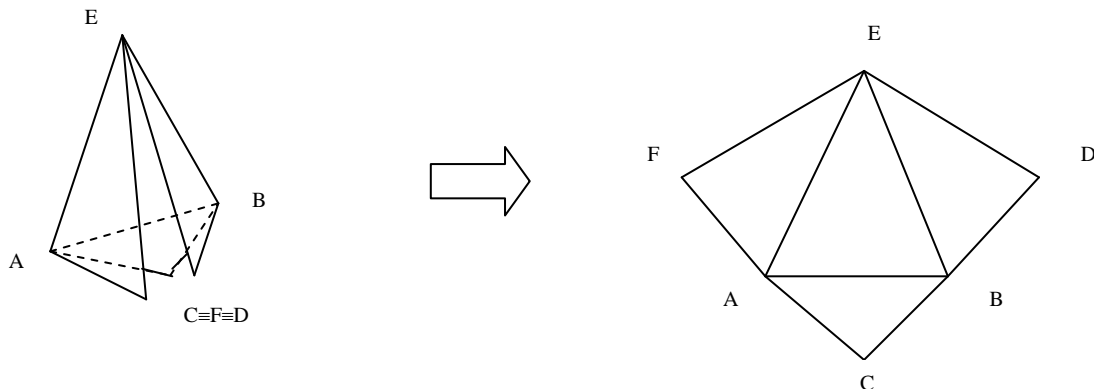


$$\text{VOLUME PIRAMIDE} = \frac{1}{3} l^2 h = 7776 \text{ cm}^3$$

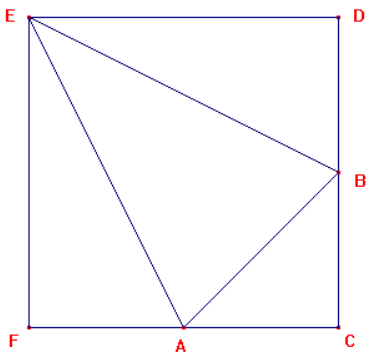
$$\text{Volume tetraedro} = \frac{1}{4} \text{Volume Piramide} = 1944 \text{ cm}^3$$

BOTTACIN Tiberio I.I.S. “Newton” Camposanpiero (PD)

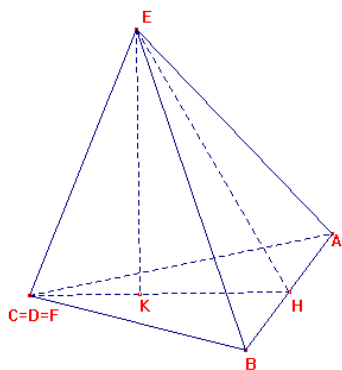
Per ottenere un quadrato di lato 36 cm dallo sviluppo di un tetraedro bisogna tagliare il tetraedro stesso lungo uno spigolo laterale e lungo i due lati della base che concorrono sullo stesso vertice:



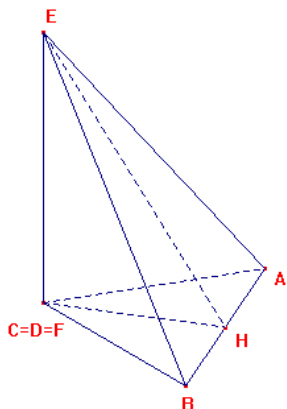
Dallo costruzione si evince che $AF = AC$, $CB = BD$ e $ED = EF$. Affinché lo sviluppo sia un quadrato di lato 36 cm, allora deve essere: $EF = ED = FC = CD = 36$ cm. Perciò, $AF = AC = CB = BD = 18$ cm. Dalla figura successiva e dal fatto che la base ABC è quindi un triangolo rettangolo isoscele si ricava: $EB = EA = 18\sqrt{5}$ cm e $AB = 18\sqrt{2}$ cm .



Ricostruiamo poi il tetraedro per scoprirne le sue proprietà:



Sia EK l'altezza, dove k , piede della perpendicolare, cade sul segmento CH della base ABC per il teorema della tre perpendicolari. Considero allora il triangolo EBA : si trova che $EH = 27\sqrt{2}$ cm. Prendendo in esame poi il triangolo ECH di lati $EC = 36$ cm, $EH = 27\sqrt{2}$ cm ed $CH = 9\sqrt{2}$ cm si scopre che è rettangolo in C . Il tetraedro così risulta avere un diedro retto in C e può essere pensato come una piramide di base il triangolo ABC ed altezza lo spigolo EC :



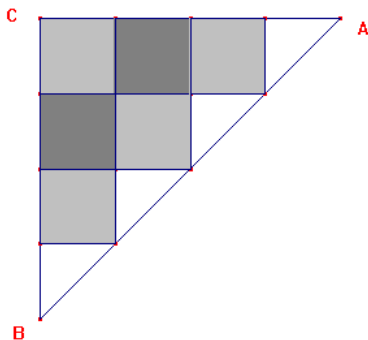
È facile ora calcolare il volume:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{18^2}{2} \cdot 36 = \frac{18^3}{3} = 1944 \text{ cm}^3 = 1,944 \text{ litri}.$$

Si nota che corrisponde ad un terzo del volume di un cubo di lato 18 cm: infatti, il parallelepipedo di base il quadrato di lato $BC = 18$ cm e altezza doppia $EC = 36$ cm ha volume pari al doppio di quello del cubo di lato BC , mentre la piramide ha volume pari ad un sesto di quello del parallelepipedo siffatto perché ha metà base: ne risulta che il volume della piramide è un terzo di quello del cubo.

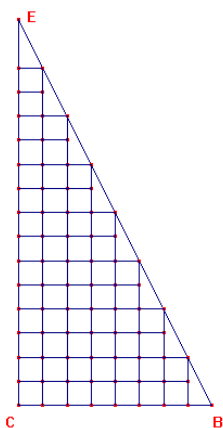
I cioccolatini

Si può pensare di riempire la scatola con cioccolatini di forma cubica di lato l . Osserviamo la base ABC:



Se n è il numero di cioccolatini di lato l disposti lungo il lato AC, allora deve essere $l = \frac{18 \text{ cm}}{n+1}$.

Tenendo presente che il triangolo ECB, faccia laterale della piramide così come EAC, retti in C e con altezza doppia della base, si possono disporre due piani sovrapposti di un ugual numero di cioccolatini e poi si sale scalando di uno, come nella figura:



Dalla proporzionalità tra i lati e dal fatto in prossimità della “punta” E della scatola non ci stanno altri cioccolatini, in altezza lungo il lato EC se ne possono disporre il doppio che lungo la base CB.

Inoltre, tenendo presente l’inclinazione della faccia EBA della piramide, si devono togliere dal conteggio tutti i cioccolatini di ogni fila: infatti, il triangolo ECH ha il lato EC che è il doppio di CH e quindi per due file successive i cioccolatini non ci stanno.

Chiamiamo “strato” il parallelepipedo costituito da due strati di uno stesso numero di cioccolatini. Allora, se n è il numero di cioccolatini lungo la base BC (o AC), allora si può riempire il primo strato con $2 \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) = n^2 - n$ cioccolatini. Sommando fino a 1 si ha:

$$\sum_{k=1}^n (k^2 - k) = \left(\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{1}{3} (n^3 - n).$$

Per esempio, per cioccolatini di 2cm di lato si ottiene $n = 8$ e $N = 168$.

Lorenzo Galante
Liceo Scientifico Statale "G. Bruno" Torino

Lo sviluppo piano di un tetraedro regolare è un triangolo equilatero o un parallelogramma. Dunque il tetraedro in questione non è regolare. Occorre capire di che tetraedro si tratti.

1° passo. Qual è il tetraedro

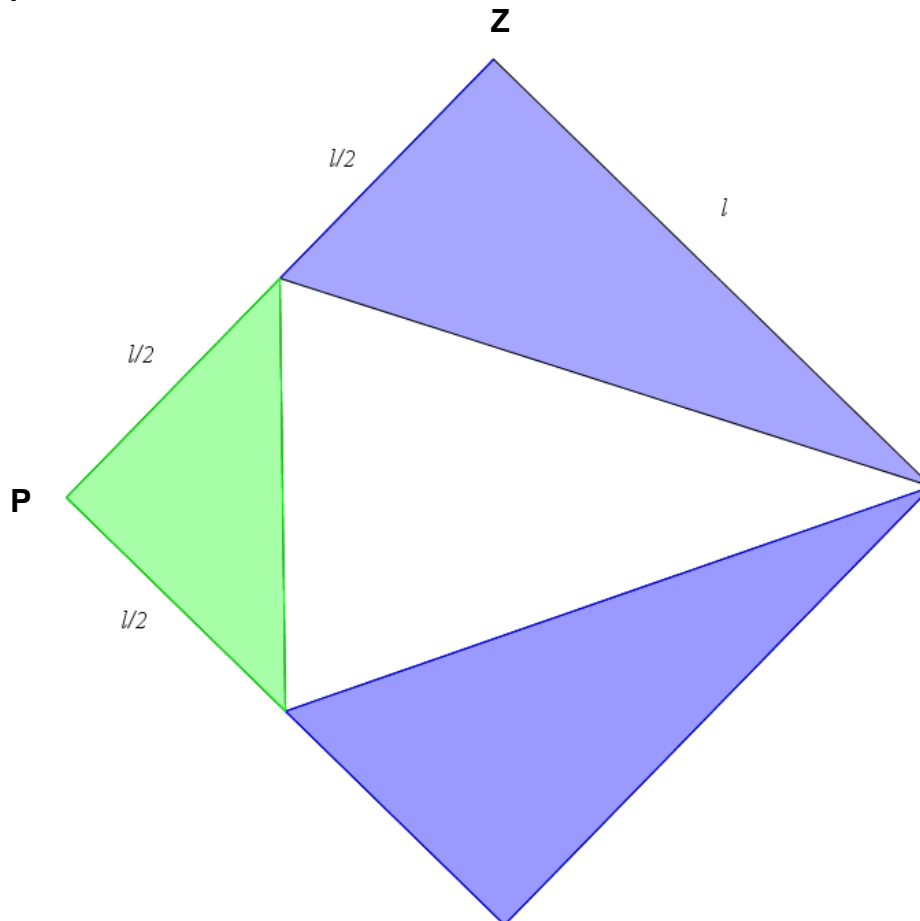


fig.1

Il tetraedro in questione ha lo sviluppo piano quadrato indicato in fig.1 (l è il lato del quadrato). [come ci sono arrivato: il triangolo blu deve avere per forza il cateto minore uguale al cateto del triangolo verde, altrimenti facendo ruotare i due triangoli intorno alle loro ipotenusa i due vertici Z e P non si sovrapporrebbero].

2° passo. Trovare l'altezza del tetraedro

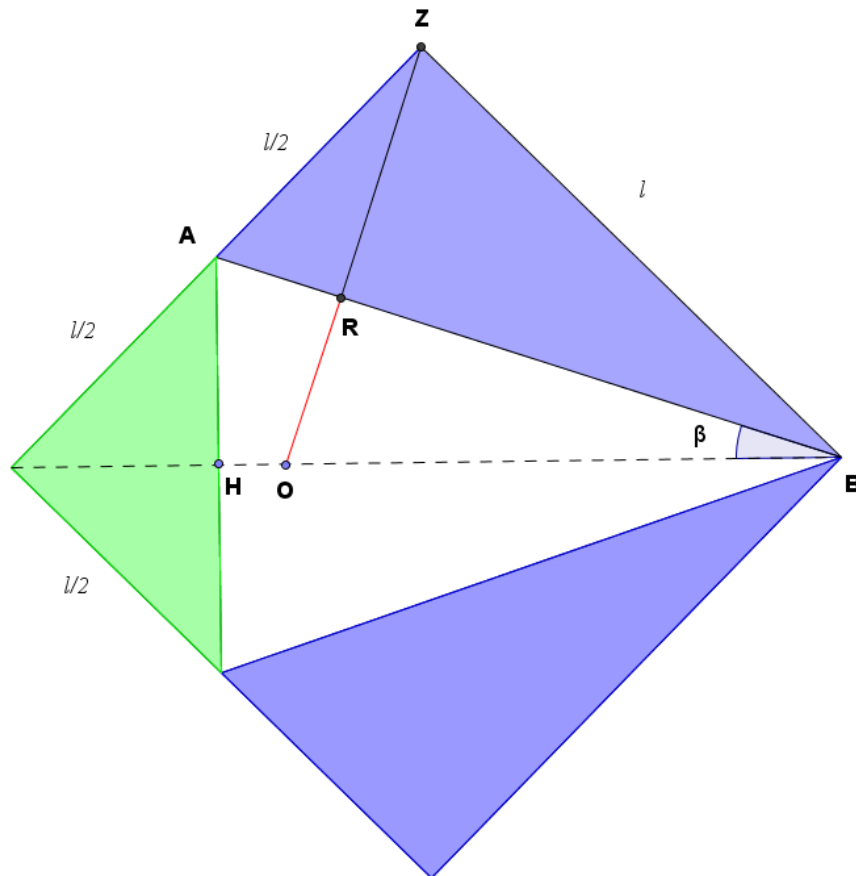


fig.2

Considero come altezza del poliedro, l'altezza relativa al triangolo di base bianco.

L'altezza del tetraedro per ragioni di simmetria rispetto al segmento H B cade sul segmento H B stesso. In particolare cade nel punto di intersezione O tra il prolungamento di ZR (altezza del triangolo blu) e HB (infatti, osservando dall'alto la rotazione di Z intorno ad AB vedremmo Z muoversi lungo ZO).

Segue che l'altezza del tetraedro è il cateto ZO del triangolo rettangolo che ha per ipotenusa ZR e per ulteriore cateto RO. Trovo ZR e RO.

ZR:

$$AB = \frac{l}{2}\sqrt{5} ,$$

$$ZR = \frac{l}{\sqrt{5}} .$$

RO:

$$AH = \frac{l}{4}\sqrt{2} ,$$

$$AH = AB \sin \beta \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}} ,$$

$$BR = \frac{2l}{\sqrt{5}} ,$$

$$\frac{RO}{BR} = \operatorname{tg} \beta \Rightarrow RO = \frac{2l}{3\sqrt{5}} ,$$

Trovo l'altezza del tetraedro con il teorema di Pitagora:

$$h_{TETRA} = \frac{l}{3} .$$

3° passo. Trovare l'area di base del tetraedro

La base è un triangolo isoscele di altezza HB e base pari a 2AH:

$$HB = \frac{3l}{2\sqrt{2}}$$

$$A_{base} = \frac{3l^2}{8} .$$

4° passo. Il volume del tetraedro

$$V = \frac{l^3}{24} .$$

Essendo il lato del quadrato di 36 cm, il volume risulta essere pari a:

$$V = \frac{(36 \text{ cm})^3}{24} = 1944 \text{ cm}^3 .$$

Risposta alla domanda: **Quanti cioccolatini potrebbe contenere?**

Con una scatola di questa forma, non riesco a trattenermi dalla tentazione di infilare un cioccolatino nella punta del tetraedro (fig. 3)

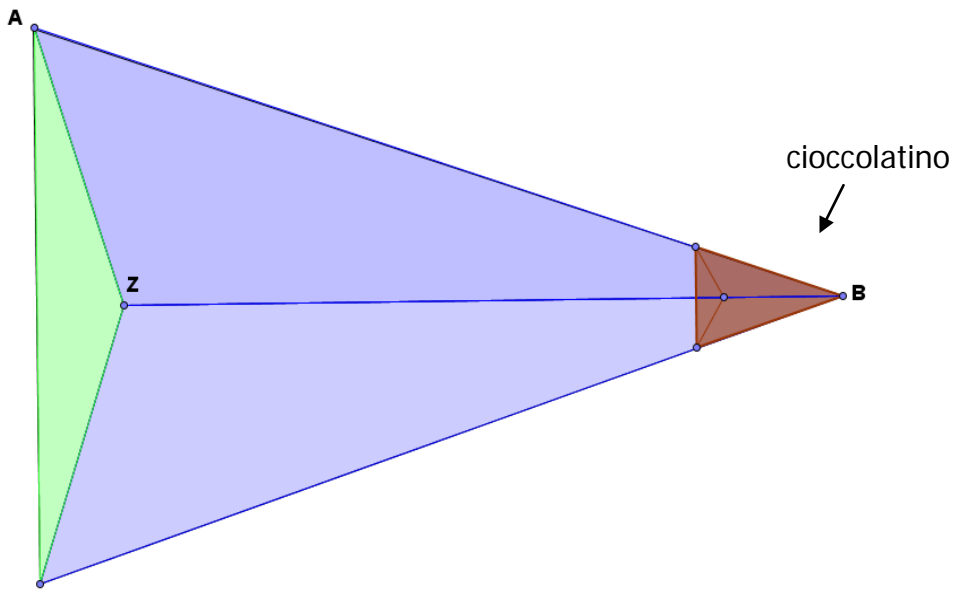
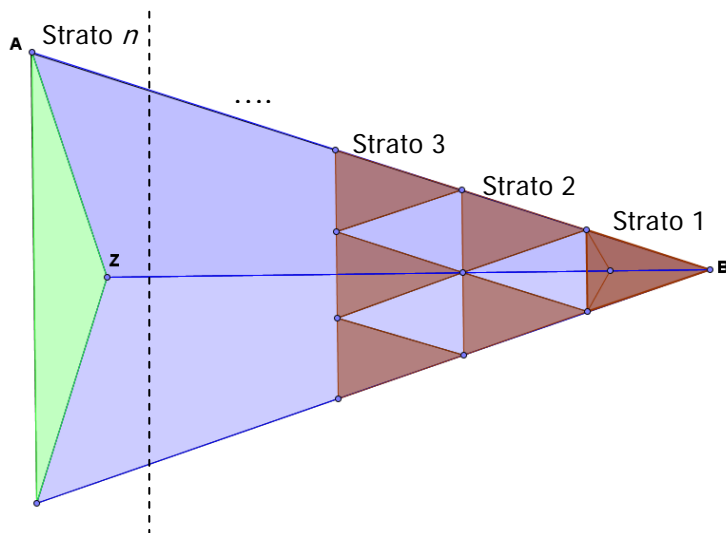


fig.3

Scelgo quindi come forma del cioccolatino un tetraedro simile al tetraedro della scatola (ottenuto cioè riducendo di uno stesso fattore di scala le tre dimensioni). I cioccolatini possono allora essere distribuiti all'interno della scatola in questo modo:

poggiamo i primi cioccolatini sulla base della scatola seguendo la struttura accennata in fig.4. Dividiamo cioè la base in n strati; nel primo strato (la punta della scatola) mettiamo un

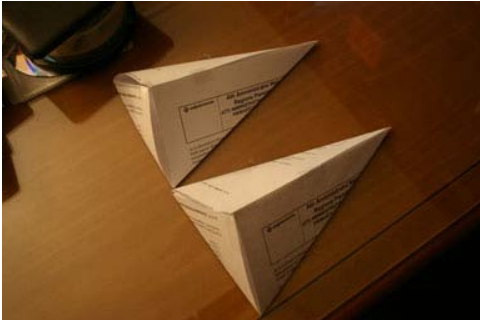
cioccolatino, nel secondo strato 2 cioccolatini e così via fino ad arrivare contro la parete verde della scatola.



Per far questo occorre scegliere cioccolatini che abbiano il lato obliquo del triangolo isoscele di base pari ad AB/n .

Fig. 4

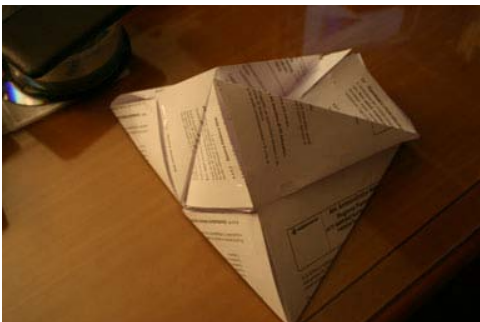
Per spiegare come procedere nella deposizione di cioccolatini all'interno della scatola è comodo servirsi di una sequenza di fotografie, che meglio di ogni parola descrivono il metodo:



Prima deposizione dei cioccolatini del *secondo strato*.



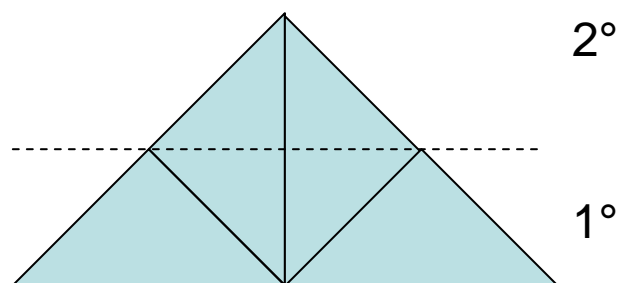
Inserisco un terzo cioccolatino nel *secondo strato* orientandolo in modo opposto...



... e poi ancora due cioccolatini al di sopra dei tre precedentemente posizionati.

A questo punto nel *secondo strato* ho 5 cioccolatini che "fittano" perfettamente le pareti della scatola contenitrice (si può dimostrare che la "vetta" di questa struttura – ha la stessa altezza della scatola, sta esattamente all'interno senza perforarne il "soffitto").

Definisco questa struttura a due piani





a



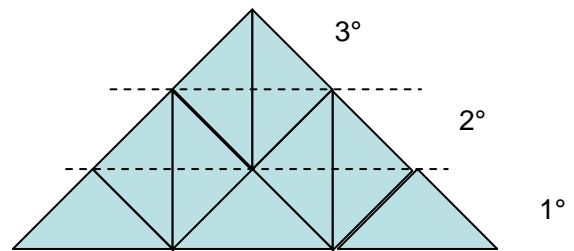
b

Queste immagini si riferiscono al *terzo strato*.

La foto a) riprende la struttura da dietro, la foto b) da davanti.

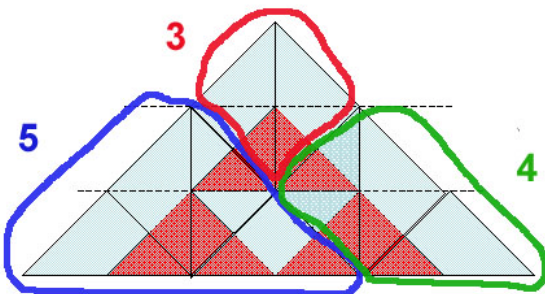
Adesso abbiamo 12 cioccolatini che nuovamente sono ben contenuti nella scatola

Questa struttura (foto a – da dietro) è a tre piani



Adesso generalizzo il conteggio dei cioccolatini contenuti nella scatola al variare di n (numero di strati).

Analizziamo la struttura del terzo strato. Indicando in rosso i tre cioccolatini orientati in senso opposto la struttura osservata da dietro risulta essere formata da



5 + 4 + 3 cioccolatini. Nel secondo strato abbiamo 5 cioccolatini, nel primo 1. Basandosi su queste suddivisioni delle strutture dei vari strati in gruppi da 5, 4 e 3 cioccolatini si può arrivare a generalizzare il numero di cioccolatini inseribili nella scatola in funzione di n :

$$N(n) = 1 + (n-1) \cdot 5 + \sum_{i=3}^n \frac{(i-2) \cdot (5+3i)}{2},$$

Possiamo mettere alla prova questa formula, valutando il numero di cioccolatini inseribili nel caso si utilizzassero 3 strati. Il calcolo porta a 18 cioccolatini aventi lato obliquo del triangolo isoscele di base lungo $\frac{l\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{3}$ cm, ovvero $6\sqrt{5}$ cm.