LA PULCE CURIOSA

Una pulce è saltata su di un quaderno a righe aperto. Ora si trova sulla riga più bassa e decide di esplorare questo nuovo territorio. E' una pulce un po' particolare: sa fare solo salti corti, da una riga alla successiva, oppure salti lunghi da una riga a due righe dopo. La pulce vuole raggiungere la riga più in alto della pagina senza mai fare salti all'indietro.

Ci chiediamo: in quanti modi diversi la pulce potrà raggiungere la riga più alta?

Le soluzioni proposte di seguito sono state presentate dai docenti:

- Salvatore Aparo - I.I.S. "M.Raeli", Noto (SR)
- Alessandro Marras - Istituto Tecnico Primo Levi, Quartu Sant'Elena (CA)
- Ugo Morra - Liceo Scientifico "Valdemaro Vecchi", Trani (BA)
- Marina Sanna, Marco Tommasi - Liceo Scientifico "Valdemaro Vecchi", Trani (BA)
- Nirvana Sguotti - ITC "A. Gramsci", Padova

SOLUZIONE DI SALVATORE APARO
I.I.S. "M.Raeli" - Noto (SR)

Supponendo che le righe del quaderno siano n, i modi diversi M in cui la pulce potrà raggiungere la riga più alta della pagina è

$$M = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-1-i}{i}$$

essendo $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ la parte intera di $\dfrac{n-1}{2}$.

DIMOSTRAZIONE

1° caso: Le righe del foglio sono dispari. Supponiamo che le righe del foglio siano 11, indicando con S i salti lunghi e con s i salti corti, la pulce può raggiungere la riga più in alto della pagina effettuando $0S + 10s$ salti o $1S + 8s$ salti o $2S + 6s$ salti o $3S + 4s$ o $4S + 2s$ salti o $5S + 0s$ salti. Per ottenere in quanti modi diversi la pulce potrà raggiungere la riga più alta della pagina si devono permutare i casi sopra indicati. Quindi:

$$M = P_{10}^{0,10} + P_{9}^{1,8} + P_{8}^{2,6} + P_{7}^{3,4} + P_{6}^{4,2} + P_{5}^{5,0}$$

$$M = \binom{10}{0} + \binom{9}{1} + \binom{8}{2} + \binom{7}{3} + \binom{6}{4} + \binom{5}{5}$$

$$M = 1 + 9 + \frac{8 \cdot 7}{2} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2} + 1$$

$$M = 1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 = 89$$

Questo si può anche sintetizzare utilizzando questa formula

$$M = \sum_{i=0}^{5} \binom{10-i}{i} = 89 \tag{1}$$

2° caso: Le righe del foglio sono pari.

Supponiamo che le righe del foglio siano 10, indicando con S i salti lunghi e con s i salti corti, la pulce può raggiungere la riga più in alto della pagina effettuando $0S + 9s$ salti o $1S + 7s$ salti o $2S + 5s$ salti o $3S + 3s$ o $4S + 1s$ salti. Per ottenere in quanti modi diversi la pulce potrà raggiungere la riga più alta della pagina si devono permutare i casi sopra indicati. Quindi:

$$M = P_9^{0,9} + P_8^{1,7} + P_7^{2,5} + P_6^{3,3} + P_5^{4,1}$$

$$M = \binom{9}{0} + \binom{8}{1} + \binom{7}{2} + \binom{6}{3} + \binom{5}{4}$$

$$M = 1 + 8 + \frac{7 \cdot 6}{2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$M = 1 + 8 + 21 + 20 + 5 = 55$$

Questo si può anche sintetizzare utilizzando questa formula

$$M = \sum_{i=0}^{4} \binom{9-i}{i} = 55 \tag{2}$$

Considerando il primo caso: indicato 11 con n si avrà $10 = n - 1$, $5 = \dfrac{n-1}{2}$. Quindi generalizzando la (1) si ha

$$M = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-1-i}{i} \tag{3}$$

Considerando il primo caso: indicato 10 con n si avrà $9 = n - 1$, $4 = \dfrac{n-2}{2}$. Quindi generalizzando la (1) si ha

$$M = \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n-1-i}{i} \tag{4}$$

Considerando che:

- se n è dispari $\dfrac{n-1}{2} = \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$,
- se n è pari $\dfrac{n-2}{2} = \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$,

le (3) e (4) si possono fondere in un'unica formula cioè

$$M = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-1-i}{i}$$

$\square$

SOLUZIONE DI ALESSANDRO MARRAS
Istituto Tecnico Primo Levi - Quartu Sant'Elena (CA)

Numeriamo le righe della pagina del quaderno a partire dalla prima in basso, che sarà quindi la numero 1, fino all'ultima in alto, che sarà la numero 30 se il foglio ha il formato $A4$ (il cosiddetto "quadernone") oppure la numero 21 se il foglio ha il formato $A5$ (l'ordinario quaderno); in entrambi i casi le righe sono larghe 8 millimetri. Il ragionamento seguito non dipende, ovviamente, dal numero di righe della pagina.

È utile anche supporre che per arrivare sulla riga più bassa, dalla quale inizia la sua esplorazione, sia occorso un salto (non importa se corto o lungo). Per arrivare alla riga 2 occorrerà un salto corto e quindi alla riga 2 posso arrivare solo in un modo dalla riga 1; per arrivare alla riga 3 la pulce dovrà fare o un salto lungo direttamente dalla riga 1 oppure un salto corto dalla riga 2, cioè 2 distinti percorsi. Per arrivare ad una generica riga k (poiché escludiamo salti indietro) la pulce o fa un salto corto dalla riga $k-1$ oppure fa un salto lungo dalla riga $k-2$; ci sono quindi due percorsi distinti (perché sono distinti il tipo di salto e la riga di partenza).

Quindi per arrivare alla riga k la pulce può seguire un numero di percorsi pari a quelli che l'hanno portata alla riga $k-1$ più un salto corto, oppure un numero di percorsi pari a quelli che l'hanno portata alla riga $k-2$ più un salto lungo. Complessivamente potrà quindi seguire un numero di percorsi pari alla somma dei percorsi che portano alla riga $k-1$ e quelli che portano alla riga $k-2$. Si avrà:

n° riga	n° percorsi	n° riga	n° percorsi	n° riga	n° percorsi
1	**1**	11	**89**	21	**10946**
2	**1**	12	**144**	22	**17711**
3	**2**	13	**233**	23	**28657**
4	**3**	14	**377**	24	**46368**
5	**5**	15	**610**	25	**75025**
6	**8**	16	**987**	26	**121393**
7	**13**	17	**1597**	27	**196418**
8	**21**	18	**2584**	28	**317811**
9	**34**	19	**4181**	29	**514229**
10	**55**	20	**6765**	30	**832040**

Quindi la pulce curiosa avrà nel quaderno $A5$ con 21 righe 10.946 modi diversi per raggiungere la riga più alta, mentre ne avrà a disposizione 832.040 nel quadernone $A4$ con 30 righe.

Considerazioni
È evidente che si tratta della successione di Fibonacci per cui, per calcolare il numero di modi distinti che conducono dalla prima riga alla riga k (secondo le regole dei salti corti e lunghi) basterà calcolare il termine di ordine k nella successione di Fibonacci (considerando come primo e secondo termine della successione il numero 1).

Si può pensare di introdurre il concetto di **salto super** (che consente alla pulce di avanzare di tre righe) ottenendo in tal modo una estensione della successione di Fibonacci, talvolta chiamata successione Tribonacci (si veda a tale proposito http://it.wikipedia.org/wiki/Successione_Tribonacci o anche http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/romagnoli/blanc.pdf).

Appare evidente una possibile generalizzazione del problema che piacerebbe al matematico ma non alla pulce.

Nota
La precisazione "le righe sono larghe 8 millimetri" è servita allo scrivente (oltre che per individuare il genere di quaderno preso in considerazione) per rendersi conto di quanto potesse essere verosimile la dimensione dei salti della pulce. In effetti ho scoperto che esistono pulci che saltano anche fino a 80 centimetri!

SOLUZIONE DI UGO MORRA
Liceo Scientifico "Valdemaro Vecchi" - Trani (BA)

Ho pensato di indicare con n il numero di righe del foglio sul quale salta la pulce. Di conseguenza $(n-1)$ rappresenta il numero degli spazi compresi tra le righe. Tale numero può essere pensato come distanza che la pulce deve "coprire" con i suoi salti. Ho iniziato a considerare lo studio dei primi casi e a fare il conto delle possibilità:

n (numero delle righe)	n-1 (numero degli spazi)	Modi in cui può saltare la pulce	N (numero totale dei modi in cui la pulce può saltare)
2	1	1	1
3	2	1+1 2	2
4	3	1+1+1 2+1 e tutte le sue permutazioni	1+2=3
5	4	1+1+1+1 2+1+1 e tutte le sue permutazioni 2+2	1+3+1=5
6	5	1+1+1+1+1 2+1+1+1 e tutte le sue permutazioni 2+2+1 e tutte le sue permutazioni	1+4+3=8
7	6	1+1+1+1+1+1 2+1+1+1+1 e tutte le sue permutazioni 2+2+1+1 e tutte le sue permutazioni 2+2+2	1+5+6+1=13
8	7	1+1+1+1+1+1+1 2+1+1+1+1+1 e tutte le sue permutazioni 2+2+1+1+1 e tutte le sue permutazioni 2+2+2+1 e tutte le sue permutazioni	1+6+10+4=21
9	8	1+1+1+1+1+1+1+1 2+1+1+1+1+1+1 e tutte le sue permutazioni 2+2+1+1+1+1 e tutte le sue permutazioni 2+2+2+1+1 e tutte le sue permutazioni 2+2+2+2	1+7+15+10+1=34

Con sorpresa ho ritrovato la successione di Fibonacci (almeno nei primi termini, anche se i primi due termini sono 1 e 2 e non 1,1,2). In ogni caso ho pensato alla generalizzazione dei casi. Mi sono accorto che il caso n dispari implica che la pulce ha come possibilità anche quella di fare tutti salti lunghi, mentre se n è pari potrà farne uno corto e tutti gli altri lunghi.

Ho cercato di generalizzare il problema, considerando un generico n, sufficientemente grande. La trasposizione aritmetica del problema è quella di considerare la disintegrazione del numero $(n-1)$ [distanza che la pulce deve coprire] in somma contenente addendi pari ad 1 e/o a 2, contando poi tutti i possibili modi in cui è possibile una cosa del genere.

$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{(n-1)\,addendi}$ si ha, ovviamente, un unico modo

$\underbrace{2+1+\cdots+1}_{(n-3)\,addendi}$ in cui il 2 può cambiare posto. Si hanno $(n-2)$ modi.

$\underbrace{2+2+1+\cdots+1}_{(n-5)\,addendi}$ di cui considerare tutte le permutazioni con ripetizione.

Più precisamente sono le permutazioni di $(n-3)$ elementi [2 due + $(n-5)$ uno] dei quali uno si ripete 2 volte e un altro $(n-5)$. Pertanto il numero di tali permutazioni è dato da:

$$\frac{(n-3)!}{2!(n-5)!} = \frac{(n-3)(n-4)}{2!}$$

$\underbrace{2+2+2+1+\cdots+1}_{(n-7)\,addendi}$ di cui considerare tutte le permutazioni.

Si tratta di permutazioni con ripetizione di $(n-4)$ elementi [3 due + $(n-7)$ uno] dei quali uno si ripete 3 volte e un altro $(n-7)$. Pertanto il numero di tali permutazioni è dato da:

$$\frac{(n-4)!}{3!(n-7)!} = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!}$$

$\underbrace{2+2+2+2+1+\cdots+1}_{(n-9)\,addendi}$ di cui considerare tutte le permutazioni.

A questo punto è chiaro che queste ultime sono in numero pari a:

$$\frac{(n-5)!}{4!(n-9)!} = \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{4!}$$

A questo punto si sommano i termini appena trovati fino al primo addendo nullo che si incontra. A tal fine mi è stato utile realizzare un file in excel per controllare se le “cose funzionano” nei primi casi già analizzati. Ecco una copia del file:

n		n-2	(n-3)(n-4)/2	(n-4)(n-5)(n-6)/6	(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)/24	
2		0	1	-4	15	
3		1	0	-1	5	
4		2	0	0	1	
5		3	1	0	0	
6		4	3	0	0	
7		5	6	1	0	
8		6	10	4	0	
9		7	15	10	1	0
10		8	21	20	5	0
11		9	28	35	15	

Si può notare come le cose funzionino per valori di n non superiori a 10. Ho ritenuto opportuno definire le seguenti funzioni di n:

$$\varphi_1(n) = \frac{(n-1)-1}{1!} = n-2$$

$$\varphi_2(n) = \frac{[(n-2)-1][(n-2)-2]}{2!} = \frac{(n-3)(n-4)}{2!}$$

$$\varphi_3(n) = \frac{[(n-3)-1][(n-3)-2][(n-3)-3]}{3!} = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!}$$

$$\varphi_4(n) = \frac{[(n-4)-1][(n-4)-2][(n-4)-3][(n-4)-4]}{4!} =$$

$$= \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{4!}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(n) = \frac{[(n-k)-1]\cdot[(n-k)-2]\cdot[(n-k)-3]\cdot\cdots\cdot[(n-k)-k])}{k!}$$

Ciascuna delle funzioni precedenti definisce i modi possibili di salto della pulce una volta che essa ha deciso quanti salti lunghi e quanti corti fare. Per ottenere il numero totale N dei salti basta sommare tali funzioni tra loro (almeno fino a quella che si annulla) e aggiungere 1 (il modo banale di saltare, di una pulce pigra ma poco furba!)

$$N = 1 + \sum_{k=1}^{\bar{n}} \varphi_k(n)$$

dove ho posto $\bar{n} = min\{k \text{ intero} \,/\, \varphi_k(n) = 0\}$.

SOLUZIONE DI MARINA SANNA - MARCO TOMMASI

Liceo Scientifico "Valdemaro Vecchi" - Trani (BA)

Delle due, una: o la pulce curiosa ha una spiccata tendenza matematica e il suo muoversi tende a rispettare eleganti leggi matematiche o, più probabilmente, la Matematica è in grado di mettere eleganza anche ai più bizzarri comportamenti dell'Universo e dei suoi abitanti.

La pulce che decide infatti di saltare sul foglio seguendo le spaziature, con balzi ora di una e ora di due righe, segue comunque un disegno che si ritrova in tantissimi altri ambiti: le possibilità offerte alla pulce per raggiungere il sommo della pagina sono infatti legate alla nota serie di Fibonacci resa famosa ultimamente al grande pubblico attraverso il libro (e poi l'omonimo film) "Il Codice Da Vinci".

In particolare, se n sono le righe del foglio, il numero di possibili percorsi della pulce sono dati dal $(n + 1)$-esimo termine delle serie di Fibonacci.

Per coprire le spazio che va dal fondo alla cima del foglio la pulce curiosa può compiere solo salti di una o due righe; si tratta quindi di scoprire in quanti modi diversi posso raggiungere il numero n sommando addendi che valgono 1 o 2. Posso usare solo 1 (una possibilità) e, se il numero è pari, posso usare solo 2 (una seconda possibilità), ma generalmente userò una combinazione di 1 e 2; esaminiamo il caso in cui $n = 4$. I casi possibili sono 5 e cioè:

a) 1+1+1+1=4,

b) 1+1+2=4,

c) 1+2+1=4,

d) 2+1+1=4,

e) 2+2=4.

Il primo e l'ultimo caso sono quelli in cui utilizzo o solo 1 o solo 2; per raggiungere 4 posso però anche sommare due 1 e un 2; l'ordine dei salti è rilevante e quindi il fatto che la pulce faccia prima il salto da 2 e poi quelli da 1 o viceversa, porta a due percorsi diversi. I possibili percorsi dati da un salto da 2 e due salti da 1 sono calcolabili tramite il calcolo di permutazioni con ripetizioni con la nota formula:

$$P_n^{(n_1,n_2)} = \frac{n!}{n_1!n_2!}$$

dove n sono gli addendi utilizzabili e n_1 ed n_2 il numero di 1 e di 2 da usare.

Nel caso di $n = 4$ avrò quindi che tutti i possibili percorsi sono dati dalla seguente somma:

$$P_4^{(4,0)} + P_3^{(2,1)} + P_2^{(0,2)}$$

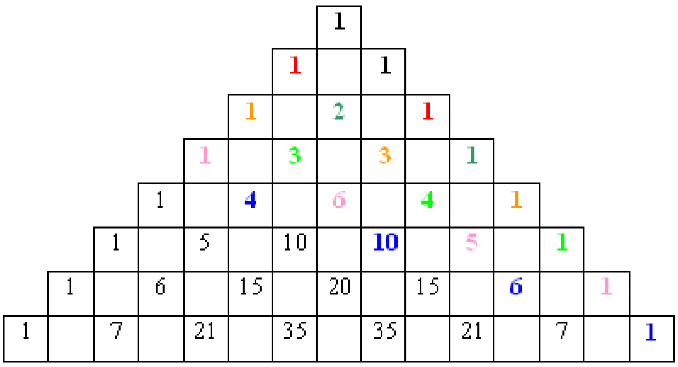
Generalizzando, possiamo "contare" i possibili percorsi partendo da quello più semplice che risulta essere formato da n salti da una riga e proseguire vedendo quanti percorsi posso ottenere sostituendo due salti da una riga con uno da due righe. In tale modo ottengo la seguente sommatoria:

$$PPP_n = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(n-i)!}{(n-2i)! \cdot i!}$$

dove n è il generico numero di righe del foglio e PPP_n è il numero dei Possibili Percorsi della Pulce.

La serie così ottenuta si ricollega alla famosa serie di Fibonacci.

E' interessante notare che i singoli addendi della somma che ci porta a calcolare il numero totale dei percorsi possibili, possono essere rintracciati all'interno del triangolo di Tartaglia; essi fanno infatti parte di una serie di corde parallele del triangolo.



La formula può essere generalizzata nei casi in cui la pulce decidesse di compiere solo salti da una riga e salti da k righe (con k ovviamente maggiore di 1):

$$PPP_n = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{k}\right]} \frac{(n-(k-1)\cdot i)!}{(n-ki)! \cdot i!}$$

anche in questo caso, gli addendi della somma sono rintracciabili sul triangolo di Tartaglia.

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

Le serie ottenuta avranno anch'esse caratteristiche interessanti; se infatti il caso base produce la serie di Fibonacci riassumibile in

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

con $n > 2$ e $F_1 = F_2 = 1$, nel caso di possibili salti solo di una e di tre righe avremo la serie

$$F_n^3 = F_{n-2}^3 + F_{n-3}^3 + F_{n-4}^3$$

e così via.

SOLUZIONE DI NIRVANA SGUOTTI
ITC "A. Gramsci" - Padova

Il problema può essere affrontato pensando che tutto dipende da quante righe ci sono nel foglio, quindi indicato con n il numero di righe la soluzione è necessariamente funzione di n. Indicando con:

- n il numero di righe presenti nel foglio,
- 1 il salto corto (da una riga alla successiva),
- 2 il salto lungo (da una riga a due righe dopo)

è evidente che qualsiasi sia n esiste sempre almeno una successione di 1 e 2 che consente alla pulce di raggiungere la riga più in alto della pagina senza mai fare salti all'indietro.

Le righe devono essere almeno due (altrimenti il problema non sussiste!) e dunque i primi casi sono:

numero di righe del foglio	Descrizione possibili successioni risolutive	Numero successioni risolutive (= modi diversi)
n = 2	1	1
n = 3	1 1 2	2
n = 4	1 1 1 1 2 2 1	3
n = 5	1 1 1 1 1 1 2 1 2 1 2 1 1 2 2	5

E via via al crescere di n si vede che in generale:

$$\text{modi}(n) = \text{modi}(n-1) + \text{modi}(n-2)$$

Questo si spiega intuitivamente pensando che qualunque sia n le sequenze corrette si ottengono prendendo quelle per $n-1$ e aggiungendo un salto corto finale (1) e poi quelle per $n-2$ aggiungendo un salto lungo finale (2).

Ma questa non è altro che la **SUCCESSIONE di FIBONACCI** dove ogni numero è la somma dei due precedenti.

In questo caso si definiscono le condizioni iniziali $\text{modi}(2) = 1$, $\text{modi}(3) = 2$ e poi in modo ricorsivo la funzione $\text{modi}(n) = \text{modi}(n-1) + \text{modi}(n-2)$ con $n > 3$.

Se si vuole calcolare direttamente l'n-esimo numero di Fibonacci è possibile applicare la nota formula di Binet:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Pertanto noto n - il numero di righe che compongono il foglio - utilizzando la formula indicata è immediato trovare in quanti modi diversi la pulce può raggiungere la riga più alta.